Agent wybiera wysiłek *e* z przedziału [0,1]. Możliwe są dwa wyniki dla pryncypała: dobry i zły, gdzie Pr(dobry)=*e*. Przychody pryncypała: *R*(dobry)=4, *R*(zły)=3. Użyteczność agenta: $U(w,e)=w-e^2$. Może on podjąć pracę u konkurencji: $U_0=1$. Wyznacz optymalny schemat wynagrodzenia *w* dla

a) *e* obserwowalnego
b) *e* nieobserwowalnego
c) Powtórz punkt a) z f. użyteczności $U(w,e)=w^{1/2}-e^2$ (skorzystaj z kalkulatora lub podaj rozwiązanie przybliżone)
d) Powtórz punkt b) z f. użyteczności $U(w,e)=w^{1/2}-e^2$ (nie rozwiązuj, tylko podaj problem optymalizacji pryncypała i przedział, w którym znajdzie się optymalny wysiłek)

Rozwiązanie

a) e jest obserwowalne => ryzyko niskich przychodów spoczywa na pracodawcy => najłatwiej uzależnić płacę bezpośrednio od wysiłku

Sposób I:
max Eπ przy zachowaniu warunku uczestnictwa agenta $U \geq U_0$

$$\max E\pi = R(\text{dobry}) \cdot e + R(\text{zły}) \cdot (1-e) - w = 4e + 3(1-e) - w$$
$$\text{pod warunkiem } w - e^2 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$E\pi = 4e+3(1-e)-1-e^2 = 2+e-e^2$$
$$\delta E\pi / \delta e = 1 - 2e = 0$$
$$e^*=0{,}5$$

Sposób II:

$$MP(e) = MC(e)$$
$$f'(e) = c'(e)$$

$$f(e) = 3*(1-e)+4e = 3+e \quad \Rightarrow \quad f'(e) = 1$$

$$c(e) = e^2 \quad \Rightarrow \quad c'(e) = 2e \quad \Rightarrow \quad 1 = 2e^* \quad \Rightarrow e^* = 0{,}5$$

Podstawiamy optymalny wysiłek do warunku uczestnictwa agenta w celu obliczenia optymalnego wynagrodzenia: $U = w - 0{,}5^2 \geq 1 = U_0$
$w^* \geq 1{,}25$

Odp: Pryncypał zaproponuje następujący kontrakt: $w_{e\geq 0,5} = 1.25$ oraz $w_{e<0,5} = 0$

Jest to lepszy kontrakt dla pryncypała, niż alternatywa $w_{e=0,5} = 1.25$ oraz $w_{e\neq 0,5} = 0$, gdyż Pr(dobry)=*e* (prawdopodobieństwo otrzymania wyższych przychodów jest równe wysiłkowi).
$E\pi^* = 2{,}25$
$EMP(e^*) = ETR = 3 + e = 3{,}5$

Kontrakt typu $s(e) = w(e) + K$ nie wchodzi w grę, gdyż użyteczność agenta nie zależy od K.
Ale gdyby $U = w+K-e^2$, to $w=f'(e)=1 \Rightarrow K = U_0 - w(e^*) + c(e^*) = 1 - 1 + 0{,}5^2 = 0{,}25$.
Pryncypał zaproponowałby następujący kontrakt: K=0,25 oraz $w_{e\geq 0,5} = 1$ oraz $w_{e<0,5} = 0$.

b) e jest nieobserwowalne => ryzyko niskich przychodów spoczywa na pracowniku => płaca musi być uzależniona od wyniku finansowego pryncypała

max $E\pi = e(4- w_{R=4})+ (1-e)(3- w_{R=3})$
pod warunkami

PC(warunek uczestnictwa): $EU \geq U_0$

$e(w_{R=4}-e^2) +(1-e) (w_{R=3}-e^2) = w_{R=4}*e + w_{R=3} (1-e) - e^2 \geq 1$, czyli aby opłacało się pracować u danego pryncypała użyteczność agenta musi być większa lub równa 1

$U(w,e)=w -e^2$ => funkcja liniowa względem w => agent jest neutralny wobec ryzyka

IC (warunek poprawności motywacyjnej): EUe*> EUe

$\delta EU / \delta e = w_{R=4}-w_{R=3}-2e=0$ => $e^*=(w_{R=4}-w_{R=3})/2$

$\delta E\pi / \delta e = 4- w_{R=4} – 3 + w_{R=3} =0$

$w_{R=4} > w_{R=3} +1$

$\Downarrow$

podstawiając do IC, mamy $e^*=(w_{R=3} +1-w_{R=3})/2 = 0,5$

podstawiając do PC, mamy $0,5w_{R=4}+0,5w_{R=3} – 0,5^2 =1 \Rightarrow w_{R=4} =2,5- w_{R=3}$

$\Downarrow$

podstawiając do wyniku maksymalizacji zysku, mamy $w_{R=3} <0,75$ i $w_{R=4} =1,75$

Odp: Dla większego przychodu pryncypała płaca wynosi 1,75, dla mniejszego - płaca wyniesie 0,75-ε.

Eπ*= 2,25 – taki sam zysk jak przy obserwowalnym wysiłku, mimo że ryzyko za niepowodzenie teraz spada na agenta. Przyczyna jednakowego zysku leży w (i) równym prawdopodobieństwie pomiędzy sytuacją powodzenia i niepowodzenia oraz (ii) jednakowej średniej płacy przy wysiłku obserwowalnym i nieobserwowalnym.

EU*= 1,245 >EU=1

c) e jest obserwowalne oraz $U(w,e)=w^{½} -e^2$

max $E\pi$ = TR-TC = $4e+ 3(1 - e) - w$

s.t. warunek uczestnictwa: $w^{1/2} - e^2 \geq 1$

$w^{1/2} \geq 1 + e^2$

$w^{1/2} = 1 + e^2 \quad => w=(1+e^2)^2$

$E\pi = 4e+ 3(1 - e) - (1 + e^2)^2 = e+3-(1+2e^2+e^4)=-e^4-2e^2+e+2$

$\delta E\pi / \delta e =-4e^3-4e+1 =0$

$e^3+e=0.25$

$e= 0.25- e^3 \quad => e\in (0;0.25)$

e^3 jest dla małych e bardzo małe, więc $e=0.25-\varepsilon$

$e=0.237$

$w=(1+e^2)^2=(1+0.056169)^2=1.115$

Odp: Pryncypał zaproponuje następujący kontrakt: $w_{e\geq0.237} = 1.12$ oraz $w_{e<0.237} = 0$

$E\pi = -0{,}237^4-2*0{,}237^2 +0{,}237+2= 2{,}122$

Jeśli agent ma awersje do ryzyka (porównaj funkcje użyteczności w (a) i (c)), to pryncypał wykorzysta to => Agenci, którzy wybierają pracę o relatywnie niskich zarobkach mimo, że posiadają wystarczające kwalifikacje do alternatywnej pracy o wyższych zarobkach przykładają większą wagę innym kryteriom (elastyczność pracy, wysiłek, dyspozycyjność itd.), niż płaca.

d) e jest nieobserwowalne oraz $U(w,e)=w^{½} -e^2$ => funkcja nieliniowa względem w => agent ma awersje do ryzyka

max $E\pi = e(4- w_{R=4})+ (1-e)(3- w_{R=3})$
pod warunkami

PC: $e\, w_{R=4}^{½} + (1-e)\, w_{R=3}^{½} - e^2 \geq 1$

IC: $\delta EU / \delta e = w_{R=4}^{½}- w_{R=3}^{½}-2e = 0 \quad =>e^* = (w_{R=4}^{½}- w_{R=3}^{½})/2$

$\delta E\pi / \delta e = 4- w_{R=4} - 3 + w_{R=3} =0$

$w_{R=4} \geq w_{R=3} +1$

$\Downarrow$

podstawiając do IC, mamy $e^*=((w_{R=3}+1)^{½} - w_{R=3}^{½})/2$ => trudne do rozwiązania. Ale skoro e=0.23 jest optymalnym rozwiązaniem w przypadku obserwowalnego wysiłku, to nie ma podstaw do zmiany wyboru wysiłku (z punktu widzenia Pryncypała) w przypadku nieobserwowalnego wysiłku.